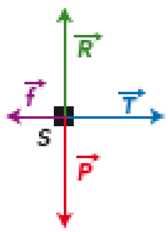
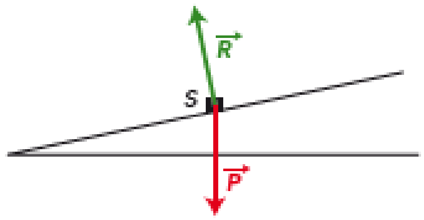
Exercice 26 :

1. Au cours du trajet AB, la skieuse S est soumise à son poids, $\vec{P}$, à la réaction normale de la surface de l'eau, $\vec{R}$, à la force de traction, $\vec{T}$, et la force de frottements, $\vec{f}$.



Au cours du trajet BC, la skieuse S est soumise à son poids et à la réaction du tremplin dont la direction est perpendiculaire au déplacement.



2. ◗ Au cours du trajet AB, le poids et la réaction sont des forces dont la direction est perpendiculaire au déplacement ; elles ne travaillent pas.

$W_{AB}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = -f \cdot AB$

$W_{AB}(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \overrightarrow{AB} = T \cdot AB$

◗ Au cours du trajet BC, seul le poids travaille :

$W_{BC}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{BC} = m \cdot g \cdot (z_B - z_C)$

$W_{BC}(\vec{P}) = -m \cdot g \cdot BC \cdot \sin \alpha$ (l'axe (Oz) est vertical ascendant et le point d'altitude $z = 0$ est situé au niveau de la surface de l'eau).

3. La force de traction est non conservative ; cela signifie que le travail de cette force dépend du chemin suivi.

4. a. La skieuse étant soumis à des forces non conservatives, entre A et B, l'énergie mécanique ne se conserve pas :

$$\mathscr{E}_m(B) - \mathscr{E}_m(A) = W_{AB}(\vec{f}) + W_{AB}(\vec{T})$$

b. En choisissant, la surface de l'eau comme référence pour l'énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathscr{E}_{pp}(A) = \mathscr{E}_{pp}(B) = 0 \text{ J}$$

La relation de la question 4a permet d'écrire :

$\mathscr{E}_c(B) - \mathscr{E}_c(A) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 = -f \cdot AB + T \cdot AB$ (en A, la vitesse est nulle)

$$T = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 + f \cdot AB\right) \cdot \frac{1}{AB}$$

$$T = \left(\frac{1}{2} \times 60{,}0 \times \left(\frac{57{,}0 \times 10^3}{3600}\right)^2 + 150 \times 200\right) \times \frac{1}{200}$$

$T = 188$ N

5. a. Le long du trajet BC, la skieuse est soumise uniquement à une force conservative, son poids; son énergie mécanique se conserve.

b. $\mathscr{E}_m(B) = \mathscr{E}_m(C)$

soit : $$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B{}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C{}^2 + m \cdot g \cdot z_C$$

avec $z_C = BC \cdot \sin \alpha$.

Donc : $$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B{}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_C{}^2 + m \cdot g \cdot BC \cdot \sin \alpha.$$

$$v_C = \sqrt{v_B{}^2 - 2 \cdot g \cdot BC \cdot \sin \alpha}$$

$$v_C = \sqrt{\left(\frac{57{,}0 \times 10^3}{3\,600}\right)^2 - 2 \times 9{,}81 \times 6{,}40 \times \sin(14{,}0)}$$

$v_C = 14{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 53{,}4\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

6. Entre B et D : $\mathscr{E}_m(B) = \mathscr{E}_m(D)$

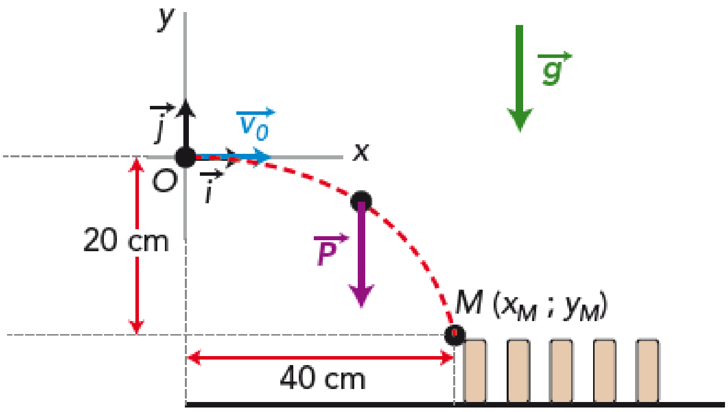
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B{}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_D{}^2 + m \cdot g \cdot z_D$$

$$z_D = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_B{}^2 - v_D{}^2}{g}\right)$$

$$z_D = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\left(\frac{57{,}0 \times 10^3}{3\,600}\right)^2 - \left(\frac{51{,}0 \times 10^3}{3\,600}\right)^2}{9{,}81}\right) = 2{,}55\ \mathrm{m}$$

Exercices 28 :

1. a. La bille est soumise uniquement à son poids, $\vec{P}$, entre les points O et M exclus.



b. Le système {bille} est étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La deuxième loi de Newton s'écrit :

$$\Sigma\vec{F} = m\cdot\vec{a},$$

d'où : $\vec{P} = m\cdot\vec{a} \Leftrightarrow m\cdot\vec{g} = m\cdot\vec{a}.$

Finalement : $\vec{a} = \vec{g}.$

c. En prenant une primitive, on obtient :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} v_x = v_0 \\ v_y = -g\cdot t \end{pmatrix}$$

puisque à $t = 0$ $\vec{v_0}\begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{pmatrix}$

d.

On a $\begin{cases} v_x = v_0 = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = -g\cdot t = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$

donc $\begin{cases} x(t) = v_0\cdot t + C_1 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}g\cdot t^2 + C_2 \end{cases}$

D'après les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = 0 = C_1 \\ y(0) = 0 = C_2 \end{cases}$$

Finalement : $\begin{cases} x(t) = v_0 \cdot t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$

Pour obtenir l'équation de la trajectoire, on isole le temps « t » de la première équation que l'on reporte dans la seconde :

$$t = \frac{x}{v_0} \longrightarrow y(x) = -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

e. Au point M : $y_M = -\dfrac{g \cdot x_M^2}{2 \cdot v_0^2}$

soit : $v_0^2 = -\dfrac{g \cdot x_M^2}{2 \cdot y_M}$

En remarquant que $y_M < 0$ et en ne conservant que la valeur positive de v_0, il vient :

$$v_0 = \sqrt{-\frac{g \cdot x_M^2}{2 \cdot y_M}}$$

$$v_0 = \sqrt{-\frac{10 \times 0{,}40^2}{2 \times (-0{,}20)}} = \sqrt{\frac{10 \times 0{,}40^2}{0{,}40}} = \sqrt{4{,}0} = 2{,}0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

2. a. Seul le poids travaille, car il n'est pas perpendiculaire au déplacement.

b. L'énergie mécanique de la bille se conserve entre A et B.

c. $\mathscr{E}_m(A) = \mathscr{E}_c(A) + \mathscr{E}_{pp}(A)$

En tenant compte du choix de l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au point O et sachant que $v_A = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, on a :

$$\mathscr{E}_m(A) = m \cdot g \cdot y_A$$

d. $\mathscr{E}_m(B) = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 + m \cdot g \cdot y_B$

Or, $y_B = 0$ m, donc $\mathscr{E}_m(B) = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2$

e. $\mathscr{E}_m(A) = \mathscr{E}_m(B)$

soit : $m \cdot g \cdot y_A = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2$

Or, $v_0 = v_B$. Donc $y_A = \dfrac{v_0^2}{2 \cdot g}$

f. $y_A = \dfrac{2{,}0^2}{2 \times 10} = 0{,}20 \text{ m}$